# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D/F**

***Varianta …*.067**

**Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările**
**Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale**
**NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.**

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

**(4p)** **a)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3}$.

**(4p)** **b)** Să se determine numărul real *a*, astfel încât punctele $A(1,2)$, $B(-1,0)$ și $C(0,a)$ să fie coliniare.

**(4p)** **c)** Să se calculeze lungimea înălțimii din *M* a triunghiului *MNP* dacă $NP=10$ și aria este egală cu 20.

**(4p)** **d)** Să se calculeze coordonatele punctului *T*, mijlocul segmentului $[NP]$, unde $N(1,2)$, $P(3,2)$.

**(2p)** **e)** Să se calculeze lungimea medianei din *M* a triunghiului *MNP*, dacă $M(2,4)$, $N(1,2)$ și $P(3,2)$.

**(2p)** **f)** Să se determine numărul real *b* dacă $S(2,3)$, $Q(3,b)$ și $\overrightarrow{SQ}=\vec{i}+\vec{j}$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

**1.** Se consideră mulțimea $A=\{10,11,\ldots,30\}$.

**(3p)** **a)** Să se calculeze suma elementelor mulțimii *A*.

**(3p)** **b)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii *A*.

**(3p)** **c)** Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii *A* să fie divizibil cu 3.

**(3p)** **d)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *A*, divizibile cu 5.

**(3p)** **e)** Să se calculeze $C_{10}^{3}$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x+\frac{x^2}{2}$.

**(3p)** **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

**(3p)** **b)** Să se arate că funcția *f* este crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

**(3p)** **c)** Să se arate că $f'(x)\geq 2$, $\forall x\in(0,\infty)$.

**(3p)** **d)** Să se calculeze $\int_1^e\left(f(x)-\frac{x^2}{2}\right)dx$.

**(3p)** **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ şi mulțimile $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -3b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbf{C}\right\}$,

$G'=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -3b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbf{R}, a^2+3b^2=1\right\}$. Dacă $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, notăm ${}^tX=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei $A$, dacă $A\in G'$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $A,B\in G'$, atunci $A\cdot B\in G'$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că dacă $A\in G'$, atunci $\det\left(A-{}^tA\right)\geq 0$.

(2p) **d)** Să se determine matricea $A\in G'$ cu proprietatea că ${}^tA\in G'$.

(2p) **e)** Să se calculeze matricea $P^4$.

(2p) **f)** Să se determine matricele $A\in G$ cu proprietatea că $\left(A+{}^tA\right)^2=4I_2$.

(2p) **g)** Să se calculeze matricea $\left(A-{}^tA\right)^{4n}$, dacă $A\in G$ şi $n\in\mathbf{N}^*$.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile $f,g,h:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+3^x+3x$, $g(x)=x^e+e^x+ex$, $h(x)=g(x)-ex$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(2)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3-3x}{g(x)-x^e-ex}$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\quad \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

(2p) **f)** Să se arate că $f(x)\geq g(x), \forall x\geq 1$.

(2p) **g)** Să se arate că $h(1)+\mathrm{h}(2)+\ldots+\mathrm{h}(\mathrm{n})\leq\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+\dfrac{3\left(3^n-1\right)}{2}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.